J M S K
Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
Vol. 12, No. 2, 160-163, Januari 2016

ISBN:1858-1382

Bilangan Bulat Gauss

Nur Erawati*

Abstrak

Daerah Euclid yang sangat dikenal adalah *Z*, himpunan semua bilangan bulat. Tulisan ini mengkaji mengenai adanya daerah Euclid yang merupakan bagian dari himpunan bilangan kompleks.

Kata Kunci: *Fungsi Euclid, daerah integral, bilangan kompleks.*

1. Pendahuluan

Bagi yang telah mempelajari daerah Euclid, tentunya sudah tidak asing lagi dengan himpunan bilangan bulat *Z* dan polinomial *F*[*X*], dengan *F* suatu lapangan. Tulisan ini memperkenalkan daerah Euclid yang merupkakan bagian dari himpunan kompleks. Tentu dalam suatu daerah Euclid ada fungsi Euclid yang berlaku dan di dalam himpunan tersebut tidak memuat pembagi nol.

2. Pembahasan

Berikut diberikan definisi bilangan bulat Gauss dan fungsi Euclid di dalamnya.

Definisi.
Bilangan bulat Gauss merupakan bilangan kompleks a+bi dengan $a, b \in Z$ *untuk setiap bilangan bulat gauss α =a+bi, normnya N(α) didefinisikan sebagai* $a^2 + b^2$.

Misalkan *Z*[*i*] himpunan semua bilangan bulat Gauss. Lemma berikut menunjukkan bahwa fungsi norm *N* merupakan fungsi Euclid pada *Z*[*i*].
Perhatikan bahwa bilangan bulat Gauss memuat semua bilangan bulat yaitu *Z*.

Lemma 1.
Sifat-sifat fungsi Norm N, untuk setiap $\alpha, \beta \in Z[i]$,

1. $N(\alpha) \geq 0$,
2. $N(\alpha) = 0$ *jika dan hanya jika* $\alpha = 0$,
3. $N(\alpha\beta) = N(\alpha)\ N(\beta)$.

Bukti:
Sifat 1 dan 2 jelas dipenuhi. Selanjutnya, akan dibuktikan sifat 3.
Misalkan $\alpha = a_1 + a_2 i$ dan $\beta = b_1 + b_2 i$ maka

$$N(\alpha) = a_1^2 + a_2^2,$$

* *Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin*

dan

$$N\ (\beta) = b_1^2 + b_2^2\ .$$

Sedangkan $N\ (\alpha\beta) = N\left((a_1 + a_2 i)(b_1 + b_2\ i)\right)$.
Sehingga

$$N(\beta)\ N(\alpha)\ = (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) = a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2$$
$$= N((a_1 b_1 - a_2 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i)$$
$$= (a_1 b_1 - a_2 b_2)^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2.$$

$$= {a_1}^2 {b_1}^2 - 2a_1 b_1 a_2 b_2 + {a_2}^2 {b_2}^2 + {a_1}^2 {b_2}^2 + 2a_1 b_2 a_2 b_1 + {a_2}^2 {b_1}^2.$$

Karena di dalam bilangan bulat berlaku sifat komutatif perkalian maka

$$a_1 b_1 a_2 b_2 = a_1 b_2 a_2 b_1.$$

Akibatnya

$$N(\alpha\beta) = {a_1}^2 {b_1}^2 + {a_2}^2 {b_2}^2 + {a_1}^2 {b_2}^2 + {a_2}^2 {b_1}^2.$$

Jadi jelas terbukti bahwa $N(\alpha)\ N(\beta) = N(\alpha\beta)$. □

Lemma 2.
Z [i] *merupakan suatu daerah integral.*

Bukti:
Dapat ditunjukan bahwa *Z*[i] suatu gelanggang komutatif dengan unsur identitas perkalian (*unity*).
Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa Z[i] tidak memuat pembagi nol.
Misalkan $\alpha, \beta \in Z[i]$. Jika $\alpha\beta = 0$ maka $N(\alpha)\ N(\beta) = N(\alpha\beta) = N(0) = 0$.
Dengan demikian $\alpha\beta = 0$ melibatkan $N(\alpha) = 0$ atau $N(\beta) = 0$.
Jadi *Z*[i] tidak memuat pembagi nol atau *Z*[i] suatu daerah integral.
Tentunya, karena *Z*[i] sub gelanggang dari *C* lapangan bilangan kompleks, jelas *Z*[i] tidak memuat pembagi nol. □

Teorema.
Fungsi N(α) *untuk setiap* α *tak nol di Z*[i] *merupakan funsi Euclid pada Z*[i]. *Dengan demikian Z*[i] *suatu daerah Euclid.*

Bukti:
Perhatikan bahwa untuk $\beta = b_1 + b_2 i \neq 0$, $N\ (b_1 + b_{2i}) = {b_1}^2 + {b_2}^2$ sehingga $N(\beta) \geq 1$, maka untuk $\alpha, \beta\ \neq 0$ di $Z[i]$, $N(\alpha) \leq N(\alpha)N(\beta) = N(\alpha\beta)$.

Selanjutnya akan dibuktikan algoritma pembagian.
Misalkan $\alpha, \beta\ \in Z[i]$ dengan $\alpha = a_1 + a_2 i$ dan $\beta = b_1 + b_2 i$ dengan $\beta\ \neq 0$.
Akan ditentukan σ, ρ sedemikian sehingga $\alpha = \beta\sigma + \rho$, dimana

$$\rho = 0 \text{ atau } N(\rho) < N(\beta) = {b_1}^2 + {b_2}^2.$$

Ambil $\sigma = q_1 + q_2 i$ dimana $q_1, q_2\ \in Z$,
Sehingga

$$\rho = (a_1 + a_2 i) - (b_1 + b_2 i)(q_1 + q_2 i)$$
$$= (a_1 - b_1 q_1 + b_2 q_2) + (a_2 - b_1 q_2 - b_2 q_1) i \,.$$

Selanjutnya akan ditentukan bilangan bulat q_1 dan q_2 sehingga,

$$N(\rho) = (a_1 - b_1 q_1 + b_2 q_2)^2 + \ (a_2 - b_1 q_2 - b_2 q_1)^2 \ < \ {b_1}^2 + {b_2}^2,$$

yaitu sedemikian sehingga

$$\frac{(a_1 - b_1 q_1 + b_2 q_2)^2}{{b_1}^2 + \ {b_2}^2} + \frac{(a_2 - b_1 q_2 - b_2 q_1)^2}{{b_1}^2 + \ {b_2}^2} < 1$$

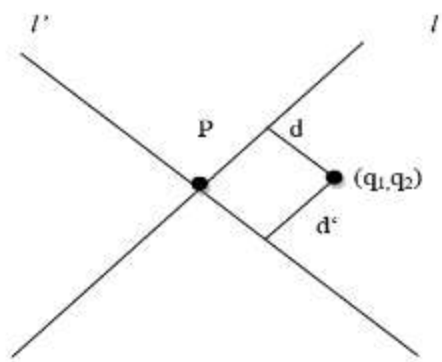
Perhatikan bahwa

$$\frac{(a_1 - b_1 q_1 + b_2 q_2)^2}{{b_1}^2 + \ {b_2}^2}$$

merupakan kuadrat dari jarak d dalam bidang Euclid dari titik (q_1, q_2) ke garis *l* yang memiliki persamaan $a_1 - b_1 X + b_2 Y = 0$.
Demikian pula

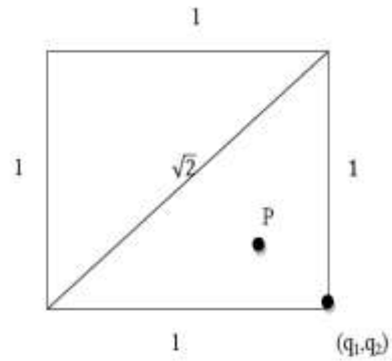
$$\frac{(\ a_1 - b_1 q_2 - b_2 q_1)^2}{{b_1}^2 + \ {b_2}^2}$$

merupakan kuadrat dari jarak *d'* dari (q_1, q_2) ke garis *l'* dengan persamaan $a_1 - b_2 X - b_1 Y = 0$. Perhatikan bahwa *l* tegak lurus dengan *l'* sebagaimana yang diperlihatkan pada Gambar 1. Misalkan *P* titik potong kedua garis ini.



Gambar 1. Perpotongan Garis *l* dan *l'*.

Dari Gambar 1 dapat dilihat bahwa d^2+$(d')^2$ merupakan kuadrat jarak dari (q_1,q_2) ke *P*. Dengan demikian harus ditunjukkan ada titik (q_1,q_2) dengan koordinat bilangan bulat dan memiliki jarak dari *P* yang kuadratnya kurang dari 1.



Gambar 2. Bujur sangkar.

Perhatikan bujur sangkar dalam Gambar 2, dimana bujur sangkar ini memiliki satu sisi satuan dan titik-titik sudut yang merupakan koordinat bilangan bulat. Karena P termasuk atau pada batas bujur sangkar ini, maka dapat dipilih (q_1,q_2) koordinat bilangan bulat terdekat dari P, dimana jarak titik ini dari P paling besar setengah diagonal bujur sangkar yaitu paling besar $\frac{\sqrt{2}}{2}$, yaitu kurang dari 1.

Perlu diketahui bahwa

1. Unit di $Z[i]$ adalah bilangan bulat kompleks α dengan $N(\lambda) = 1$.
   Jika $\lambda = \alpha_1 + \alpha_2 i$ maka $N(\lambda) = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1$.
   Kemungkinan yang ada yaitu $\alpha_1 = \pm 1$ dengan $\alpha_2 = 0$, atau $\alpha_1 = 0$ dengan $\alpha_2 = \pm 1$.
   Sehingga unit-unit di $Z[i]$ adalah ± 1 dan $\pm i$.

2. Jika 5 merupakan unsur yang tidak dapat dibagi $Z[i]$, maka 5 masih dapat difaktorkan yaitu $5 = (1 + 2i)(1 - 2i)$, dan keduanya $(1 + 2i)$ maupun $(1 - 2i)$ bukan unit.

3. Kesimpulan

Subset dari himpunan bilangan kompleks, yaitu bilangan bulat Gauss memiliki norm yang memenuhi syarat sebagai fungsi Euclid. Lebih jauh, $Z[i]$ tidak memuat pembagi nol sehingga dapat disebut suatu daerah integral. Jadi $Z[i]$ merupakan bagian dari lapangan kompleks yang memenuhi kriteria sebagai suatu daerah Euclid.

Daftar Pustaka

[1] Fraleigh, J.B., 1994. *A First Course is Abstract Algebra*, 5th *Edition*. Addison-Wesley Publishing Company, United States of America.

[2] Herstein, I.N., 1975. *Topics in Algebra*, 2nd *Edition*. John Wiley & Sons lnc., New York.